

Wykład 4

Granica ciągu

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik
Katedra Matematyki

Definicja

Ciągiem skończonym o k wyrazach ($k \in \mathbb{N}$ ustalone) ze zbioru X nazywamy dowolną funkcję $a : \{1, 2, 3, \dots, k\} \rightarrow X$.

Definicja

Ciągiem nieskończonym o wyrazach ze zbioru X nazywamy dowolną funkcję $a : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Będziemy zajmować się tylko ciągami nieskończonymi.

Aby wyznaczyć ciąg, wystarczy wyznaczyć jego wyrazy $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$, ... w odpowiedniej kolejności.

Dla uproszczenia zamiast $a(n)$ piszemy a_n .

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$$

Definicja

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych.

- 1 Jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n < a_{n+1}$, to (a_n) nazywamy *rosnącym*.
- 2 Jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} < a_n$, to (a_n) nazywamy *malejącym*.
- 3 Jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq a_{n+1}$, to (a_n) nazywamy *niemalejącym*.
- 4 Jeśli $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \leq a_n$, to (a_n) nazywamy *nierosnącym*.

Ćwiczenie

Zbadać monotoniczność ciągów (a_n) .

- 1 $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$
- 2 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Definicja

Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony.

Ćwiczenie

Sprawdzić czy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

① $a_n = (-1)^n + \frac{2}{n}$

② $a_n = e^{\sqrt[3]{n}}$

Definicja

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ciągiem o wyrazach z X . Mówimy, że ciąg ten ma *granice równą a* i piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad d(a_n, a) < \epsilon.$$

Ciąg, który ma granicę nazywamy *zbieżnym*.

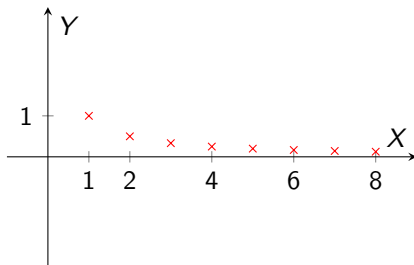
Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *rozbieżnym*.

W $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do a , gdy

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

Przykład

Rozważmy ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{n}$.



Mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Przykład

Ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny.

Przykład

Ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^n$ również jest rozbieżny.

W $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową ciąg $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do (x, y) ,
jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad d((x_n, y_n), (x, y)) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \text{w } \mathbb{R} \text{ z metryką euklidesową}$$

Przykład

Ciąg $(-\frac{1}{3^n}, 1 - \frac{2}{n})$ jest zbieżny do punktu $(0, 1)$.

W $\mathbb{C}$ z metryką euklidesową ciąg $(x_n + iy_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $x + yi$,
jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad d((x_n, y_n), (x, y)) < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad |x_n + y_n i - (x + yi)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \text{w } \mathbb{R} \text{ z metryką euklidesową}$$

Przykład

Dla ciągu $\frac{3-i}{n+i}$ mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-i}{n+i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-i)(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1-(n+3)i}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{n^2+1} - \frac{n+3}{n^2+1} i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} i \right) \\ &= 0 - 0i = 0. \end{aligned}$$

Własności granic

Twierdzenie

Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to ma on dokładnie jedną granicę.

Własności granic

Dowód.

Posłużymy się nierównością trójkąta:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

Założmy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, ale ma więcej niż jedną granicę.

Rozważmy dwie z nich – L_1 i L_2 . Z definicji granicy mamy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 \quad d(a_n, L_1) < \epsilon$$

oraz

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 \quad d(a_n, L_2) < \epsilon.$$

Ustalmy n takie, że $n > N_1$, $n > N_2$. Wtedy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_1, N_2 \quad d(a_n, L_1) + d(a_n, L_2) < 2\epsilon.$$

Teraz z nierówności trójkąta otrzymujemy:

$$2\epsilon > d(a_n, L_1) + d(a_n, L_2) \geq d(L_2, L_1).$$

Zatem

$$\forall \epsilon > 0 \quad d(L_2, L_1) < 2\epsilon.$$

Oznacza to, że $d(L_2, L_1) = 0$, czyli $L_2 = L_1$.



Własności granic

Twierdzenie

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie

Jeśli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.

Własności granic

Twierdzenie

Założmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wtedy

❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b,$

❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot a$ dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{C},$

❸ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$

❹ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ pod warunkiem, że $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}.$

❺ $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

Najważniejsze granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \text{dla wszystkich } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \text{dla wszystkich } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla wszystkich } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{dla wszystkich } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{a^n} = 0 \quad \text{dla wszystkich } a > 1 \text{ i wielomianów } P$$

Własności granic

Twierdzenie (O trzech ciągach)

Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniony jest warunek $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Przykład

Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\cos(n^2 - \arctan n)}{n}$.

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{n} & \leq & \frac{\cos(n^2 - \arctan n)}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Granice niewłaściwe

Definicja

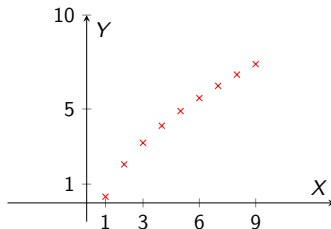
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest rozbieżny do ∞ /ma granicę niewłaściwą równą ∞ , jeśli*

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ a_n > M.$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Przykład

Niech $a_n = \frac{1}{3}n + 2 \ln n$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Granice niewłaściwe

Definicja

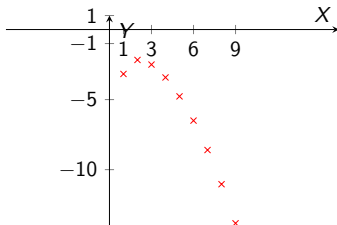
Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest rozbieżny do $-\infty$ /ma granicę niewłaściwą równą $-\infty$, jeśli*

$$\forall m < 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ a_n < m.$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Przykład

Niech $a_n = -\frac{1}{6}n^2 - \frac{3}{n}$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Przykład

Granica ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ jest równa ∞ .

Przykład

Granica ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{-n^2+n+1}{2n}$ jest równa $-\infty$.

Wniosek

Jeśli $a > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$.

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0,$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty,$$

$$\textcircled{4} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} \ a_n < 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty,$$

$$\textcircled{5} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge (b_n) \text{ jest ograniczony} \right) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Symbole nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty]$$

$$[1^\infty] \quad [\infty^0] \quad [0^0]$$

Przykład

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\operatorname{tg} \frac{1}{n^2}} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{\ln(n^6 + 2)} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 5n^3) \quad [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \quad [0 \cdot \infty]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{2n^2 + 3n} \quad [1^\infty]$$

Ćwiczenie

Obliczyć.

$$① \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^2 - 4n + 1}$$

$$② \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{2n + 3} \right)^3$$

$$③ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$$

$$④ \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n})$$

Twierdzenie

Ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazie ogólnym $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony.

Wniosek

Ciąg $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, zdefiniowany jak powyżej, jest zbieżny.

Twierdzenie

Granica ciągu $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazie ogólnym $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest równa liczbie e .

Twierdzenie

Założmy, że $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Twierdzenie

Jeśli $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

Przykład

Obliczmy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n+1} = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} \right]^{\frac{2}{3n} \cdot (4n+1)}.$$

Zgodnie z twierdzeniem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{\frac{3n}{2}} = e$.

$$\text{Ponadto } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3n} \cdot (4n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+2}{3n} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Zatem } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n+1} = e^{\frac{8}{3}}.$$

Ćwiczenie

Obliczyć.

❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2}{n^2+1}\right)^{4n}$

❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+11}{n+7}\right)^{-3n}$

Podciągi

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Niech

$$(n_k) = (n_1, n_2, n_3, \dots)$$

będzie taki, że $n_k \in \mathbb{N}$ oraz $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Definicja

Niech (b_n) będzie ciągiem takim, że

$$(b_k) = (a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots).$$

Wtedy (b_n) nazywamy *podciągiem* ciągu (a_n) .

Pytania

- 1 Jeśli ciąg jest zbieżny, to czy podciąg również musi być zbieżny?
- 2 Jeśli ciąg jest rozbieżny, to czy podciąg musi być rozbieżny?
- 3 Jeśli podciąg jest zbieżny, to czy ciąg musi być zbieżny?
- 4 Jeśli podciąg jest rozbieżny, to czy ciąg musi być rozbieżny?

Pytania

- 1 Jak wpływa na zbieżność ciągu usunięcie skończonej liczby wyrazów?
- 2 Jak wpływa na zbieżność ciągu dodanie skończonej liczby wyrazów?
- 3 Jak wpływa na zbieżność ciągu usunięcie nieskończonej liczby wyrazów?
- 4 Jak wpływa na zbieżność ciągu dodanie nieskończonej liczby wyrazów?