

Zastosowania pochodnej

1 Zastosowanie pochodnej do wyznaczania stycznej do wykresu funkcji

Zad.1. Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji f w punktach o danych odciętych x_0 .

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x$, $x_0 = -1$

(7) $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$, $x_0 = 2$

(8) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$

(3) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3}$, $x_0 = -1$

(9) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 1$

(4) $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$, $x_0 = -1$

(5) $f(x) = \sqrt{3x+2}$, $x_0 = 1$

(10) $f(x) = 2^{x^3}$, $x_0 = 0$

(6) $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$, $x_0 = -1$

(11) $f(x) = 3^{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Zad.2. Napisać równanie stycznej (o ile taka istnieje) do wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x$, która:

(1) jest równoległa do prostej $y = 2x + 5$,

(2) jest równoległa do prostej $y = -2x - 1$,

(3) jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{3}x + 2$,

(4) jest prostopadła do prostej $y = -\frac{1}{4}x - 9$.

Zad.3. Napisać równanie stycznej (o ile taka istnieje) do wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = 2 \cos x + 1$, która:

(1) jest równoległa do osi OX ,

(2) jest równoległa do prostej o równaniu $y = \sqrt{3}x + 1$,

(3) jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{2}x - 6$,

jeśli wiadomo, że odcięta punktu styczności znajduje się w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zad.4. Napisać równanie stycznej (o ile taka istnieje) do wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = x \ln x - 2x$, która:

- (1) jest równoległa do prostej o równaniu $y = 21$,
- (2) jest równoległa do prostej o równaniu $y = 2x - e^3$,
- (3) jest prostopadła do prostej o równaniu $y = x + 3$.

Zad.5. Napisać równanie stycznej do krzywej $y = \arcsin \frac{x-2}{3}$, w punkcie przecięcia tej krzywej z osią OX .

Zad.6. Napisać równanie stycznej do funkcji f o wzorze $f(x) = e^{x^2-1}$ w punktach przecięcia tej krzywej z prostą $y = e^3$.

Zad.7. W jakim punkcie styczna do wykresu funkcji zadanej wzorem $f(x) = x^2 + 1$:

- (1) jest równoległa do osi OX ,
- (2) tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX kąt $\frac{\pi}{3}$?

Zad.8. W jakim punkcie styczna do wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y - 2x + 1 = 0$? Napisać równanie tej stycznej.

Zad.9. Napisać równanie normalnej do wykresu funkcji f w punkcie o podanej odciętej x_0 .

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x) = \ln(e^x + 1), \quad x_0 = 0$ | (3) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 1$ |
| (2) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}(x^2 - 6)), \quad x_0 = 3$ | (4) $f(x) = \arctg(\ln x), \quad x_0 = 1$ |

Zad.10. Napisać równanie normalnej do wykresu funkcji $f, f(x) = \ln(x + 1)$, która:

- (1) jest równoległa do prostej $y = -5x + 101$,
- (2) jest równoległa do prostej $y = 2x + 7$,
- (3) jest prostopadła do prostej $y = \frac{1}{2}x + \pi$,
- (4) jest równoległa do osi OX .

Zad.11. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do krzywej zadanej parametrycznie dla podanej wartości parametru t .

$$(1) \begin{cases} x(t) = e^{2t} + 1 \\ y(t) = e^{2t} - 1 \end{cases} \quad t = 0$$

$$(3) \begin{cases} x(t) = 2^{t^2+2} \\ y(t) = 2^{t^2-2t} \end{cases} \quad t = 1$$

$$(2) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos t} \\ y(t) = \frac{1}{\sin t} \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{6}$$

$$(4) \begin{cases} x(t) = \ln(t^4 - t^2 + 1) \\ y(t) = \ln(t^6 - t^3 + 1) \end{cases} \quad t = 1$$

Zad.12. Wyznaczyć równanie stycznej do krzywej $\begin{cases} x(t) = t - t^2 \\ y(t) = 1 + t^2 \end{cases}$, która jest równoległa do prostej $y = x + 5$.

Zad.13. Wyznaczyć równanie normalnej do krzywej $\begin{cases} x(t) = \ln(t^2 + 1) \\ y(t) = \ln(t^4 + 1) \end{cases}$, która jest równoległa do prostej $y + \frac{1}{2}x = \pi$.

Zad.14. Wyznaczyć punkt na krzywej $\begin{cases} x(t) = 3 + 2t + t^2 \\ y(t) = \arcsin t - \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, w którym styczna jest prostopadła do prostej $2x + y + 6 = 0$.

Zad.15. Znaleźć punkt na krzywej $\begin{cases} x(t) = \operatorname{arctg} \sqrt{t} \\ y(t) = \ln(t + 1) \end{cases}$, w którym normalna jest prostopadła do prostej $2\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$.

Zad.16. Znaleźć punkt na krzywej $\begin{cases} x(t) = \ln \frac{e^t}{1-t} \\ y(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1 \end{cases}$, w którym styczna jest prostopadła do prostej $x + 6y - 1 = 0$.

Zad.17. Znaleźć punkt na krzywej $\begin{cases} x(t) = \arcsin t + \sqrt{1 - t^2} \\ y(t) = 1 + 2t - t^2 \end{cases}$, w którym normalna jest prostopadła do prostej $y - 2x + 3 = 0$.

Zadania dodatkowe

Zad.1. Dla jakich wartości zmiennej niezależnej styczne do wykresów f , g , $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + x + 4$ są równoległe?

Zad.2. Obliczyć pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i styczną do paraboli $y = -x^2 + 4$ w punkcie $(1, 3)$.

Zad.3. Punkt $P(1, 1)$ należy do wykresu funkcji f zadanej wzorem $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+1}$. Styczna poprowadzona do wykresu f w punkcie P jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + y - 3 = 0$. Wyznaczyć a i b .

Zad.4. Dla jakiej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ styczna do wykresu funkcji f , $f(x) = \ln(x^4 + 1) + p$ w punkcie o odciętej równej 1, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu 1?

2 Badanie przebiegu zmienności funkcji

Zad.1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema podanych funkcji.

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 4x$ | (18) $f(x) = e^{x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x}$ |
| (2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{1}{6}$ | (19) $f(x) = x^2e^{-x^2}$ |
| (3) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x$ | (20) $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$ |
| (4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ | (21) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - 6 \ln(x + 1)$ |
| (5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 6$ | (22) $f(x) = x^2 - \ln x$ |
| (6) $f(x) = 5x - x^5 + 2$ | (23) $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$ |
| (7) $f(x) = \frac{x^2 - 8}{x + 2}$ | (24) $f(x) = (x^2 - 6)e^{2x}$ |
| (8) $f(x) = \frac{x + 3}{x^2}$ | (25) $f(x) = 3x^2e^{-x^2}$ |
| (9) $f(x) = \frac{4x^2 + 7x - 2}{x + 2}$ | (26) $f(x) = x \ln^3 x$ |
| (10) $f(x) = \frac{1 - 2x}{(x - 3)^2}$ | (27) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ |
| (11) $f(x) = \frac{x^2 + x + 7}{x + 1} - 6 \ln(x + 1)$ | (28) $f(x) = 2x + 6 \operatorname{arctg} x$ |
| (12) $f(x) = x - \sqrt{x}$ | (29) $f(x) = 2x + \arccos x$ |
| (13) $f(x) = 2x \ln x$ | (30) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ |
| (14) $f(x) = -x^2 \ln x$ | (31) $f(x) = x^2 - \ln x^2$ |
| (15) $f(x) = \ln^2 x$ | (32) $f(x) = 2 \ln(e^x + 1) - x$ |
| (16) $f(x) = -3x + \ln x$ | (33) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-x}}$ |
| (17) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x}$ | |

Zad.2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji oraz punkty przegięcia.

- | | |
|--|---|
| (1) $f(x) = 2 \ln x - 3x$ | (12) $f(x) = \frac{2x^3}{x+2}$ |
| (2) $f(x) = x^2 + 3 \ln x$ | (13) $f(x) = xe^{-3x}$ |
| (3) $f(x) = xe^{-2x}$ | (14) $f(x) = x^3(1 - \ln x)$ |
| (4) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x+2}}$ | (15) $f(x) = x^3 - 4x - 3$ |
| (5) $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$ | (16) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1$ |
| (6) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ | (17) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x}$ |
| (7) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$ | (18) $f(x) = 1 - \ln(x^2 - 9)$ |
| (8) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 3$ | (19) $f(x) = e^{4x} - e^{-3x}$ |
| (9) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ | (20) $f(x) = \frac{1}{7x^6} - \frac{1}{12x^8} + \frac{1}{12}$ |
| (10) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ | (21) $f(x) = x \ln^3 x$ |
| (11) $f(x) = \frac{x+1}{x^3}$ | (22) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ |

Zad.3. Wyznaczyć przedziały, w których dana funkcja jest jednocześnie malejąca i wypukła.

- (1) $f(x) = xe^{-2x}$ (2) $f(x) = x - \sin x$ (3) $f(x) = x \ln^3 x$

Zad.4. Wyznaczyć przedziały, w których dana funkcja jest jednocześnie rosnąca i wklęsła.

- (1) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ (2) $f(x) = -(x-1)^2 \ln(x-3)$ (3) $f(x) = (x-3)e^{\frac{1}{3-x}}$
1)

Zad.5. Wyznaczyć przedziały, w których dana funkcja jest rosnąca i przyjmuje wartości ujemne.

- (1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (2) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ (3) $f(x) = (2x^2 - 1)e^x$

Zad.6. Wyznaczyć przedziały, w których dana funkcja jest wypukła i przyjmuje wartości dodatnie.

- (1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2$ (2) $f(x) = (x-1)e^x$ (3) $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{x}}$

Zad.7. Sprawdzić czy podane funkcje osiągają w podanych przedziałach wartość największą lub najmniejszą. Jeśli tak, podać ile wynoszą te wartości oraz w jakich punktach są osiągane.

- | | |
|---|--|
| (1) $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad \langle -2, 3 \rangle$ | (4) $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad (0, \frac{1}{e})$ |
| (2) $f(x) = xe^{x^2}, \quad \langle 0, 1 \rangle$ | (5) $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad (\frac{1}{e}, e)$ |
| (3) $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad \langle e, 2e \rangle$ | (6) $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad \langle \frac{1}{2e}, 2e \rangle$ |

Zadania dodatkowe

Zad.1. Dla jakiej wartości parametru p funkcja f jest rosnąca w całej dziedzinie?

- (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + px + 1,$ (2) $f(x) = x^3 - (p + 2)x - 10.$

Zad.2. Dla jakiej wartości parametru p funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum? Określić rodzaj tego ekstremum.

- (1) $f(x) = px^3 - x^2 + x + 3, \quad x_0 = -1$ (2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - px^2 + 5x - 3, \quad x_0 = 1.$

Zad.3. Funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ dla $x = 2$ osiąga ekstremum równe -1. Wyznaczyć a oraz b i rozstrzygnąć czy jest to maksimum czy minimum.

Zad.4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^{\alpha x}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Zad.5. Naskicować wykres funkcji f . Z wykresu odczytać punkty, w których funkcja osiąga ekstrema. Czy istnieje pochodna funkcji w tych punktach?

- (1) $f(x) = |x - 2| - 3$ (2) $f(x) = |x^2 - 4|$ (3) $f(x) = |\sin x|$

Zad.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji i naskicować jej wykres.

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| (1) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ | (4) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$ | (7) $f(x) = 2e^x + e^{-x}$ |
| (2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ | (5) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ | (8) $f(x) = xe^{-2x}$ |
| (3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ | (6) $f(x) = 2x - \arctg x$ | (9) $f(x) = 4 \ln x - \ln^2 x$ |

Zad.7. Który z prostokątów o obwodzie równym $2p$ ma największe pole?

Zad.8. Który z prostokątów o ustalonym polu S ma najmniejszy obwód?

Zad.9. Jakie wymiary powinna mieć puszka w kształcie walca, mająca całkowitą powierzchnię $150\pi\text{cm}^2$, aby jej objętość była największa?

Zad.10. W półkole o promieniu R wpisano prostokąt o największym polu. Wyznaczyć jego wymiary.

3 Różniczka funkcji jednej zmiennej

Zad.1. Korzystając z różniczki wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia.

- (1) $\sqrt{2,01^4 + 9}$
- (2) $(0,98^2 + 2)^3$
- (3) $\frac{4 \cdot 2,03 + 1}{2,03^2 - 2}$
- (4) $\ln(1 + \ln 1,01)$
- (5) $0,99 \cdot \cos(0,99\pi)$

4 Reguła de l'Hospitala

Zad.1. Obliczyć poniższe granice.

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ | (12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x$ | (23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\arcsin 15x}$ |
| (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ | (13) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2}$ | (24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 4x}$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^{x-1} - 1}$ | (14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ | (25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos^2 x}{\sin^2 x}$ | (15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{arctg} x - \pi}$ | (26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{tg} x$ | (16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ | (27) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$ |
| (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ | (17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{e^{2x} - 1}$ | (28) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$ | (18) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$ | (29) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{3x}$ |
| (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ | (19) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(2x+1)} \right)$ | (30) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ |
| (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(2x+1)}$ | (20) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$ | (31) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ |
| (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(2x+1)}$ | (21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+7}{x-7}$ | (32) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ |
| (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{3x}$ | (22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\sin 3x}$ | (33) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$ |
| | | (34) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + x)^{\frac{2}{x}}$ |

$$(35) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(36) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$$

$$(37) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(38) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

$$(39) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

$$(40) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$$

$$(41) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + \ln x}{e^{x-1} - 1}$$

$$(42) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$(43) \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \cdot \ln(5-2x)$$