

Wykład 0

Oznaczenia i wprowadzenie

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik
Katedra Matematyki

Zbiory liczbowe

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

zbiór liczb naturalnych

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

zbiór liczb całkowitych

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

zbiór liczb wymiernych

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\mathbb{Q}$$

zbiór liczb rzeczywistych

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

zbiór liczb zespolonych

Szczególne liczby

- π – równa stosunkowi długości okręgu do jego średnicy

$$\pi \approx 3,14159265$$

- e – liczba Napiera

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e \approx 2,718281828459$$

$$\ln x := \log_e x$$

Przedziały

Definicja

Przedziałami nazywamy podzbiory $\mathbb{R}$ postaci:

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a, b), \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = (a, \infty)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = \langle a, b \rangle, \quad \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = \langle a, \infty \rangle$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = \langle a, b \rangle, \quad \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = (-\infty, b)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a, b], \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = (-\infty, b]$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

Uwaga

Zauważmy, że

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}, \quad (4, -2] = \emptyset, \quad \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

Definicja

Mówimy, że zbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in S \quad x \leq M.$$

Każdą liczbę M spełniającą powyższą nierówność nazywamy *ograniczeniem górnym* S .

Definicja

Mówimy, że zbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ jest *ograniczony z dołu*, jeśli

$$\exists m \in \mathbb{R} \forall x \in S \quad m \leq x.$$

Każdą liczbę m spełniającą powyższą nierówność nazywamy *ograniczeniem dolnym* S .

Definicja

Zbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Przykład

zbiór	ogr. z góry	ogr. z dołu	ograniczony
$\left\{\frac{n}{3} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	—	—	—
$\{1 - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$	+	—	—
$\left\{\frac{n^2+2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	—	+	—
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	+	+	+

Definicja

Jeśli $S \subseteq \mathbb{R}$ ma ograniczenie górne, to *najmniejsze ograniczenie górne* S nazywamy *kresem górnym/supremum* S i oznaczamy $\sup S$.
W przeciwnym przypadku (gdy ograniczenie górne nie istnieje), przyjmujemy, że $\sup S$ wynosi ∞ .

Definicja

Jeśli zbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ ma ograniczenie dolne, to *największe ograniczenie dolne* S nazywamy *kresem dolnym/infimum* S i oznaczamy $\inf S$.
W przeciwnym przypadku (gdy nie istnieje ograniczenie dolne), przyjmujemy, że *infimum* S jest równe $-\infty$.

Przykład

S	$\inf S$	$\sup S$
$\left\{\frac{4n}{3} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$-\infty$	∞
$\{1 - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$	$-\infty$	0
$\left\{\frac{n^2+2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	3	∞
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	0	1

Uwaga

Infimum i supremum S nie muszą należeć do S .

Definicja

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych takich, że pierwszy element pary należy do A a drugi do B , tzn.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Przykład

Niech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$. Wtedy

$$A \times B = \left\{ \left(1, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{5}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{1}{5}\right), \left(3, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{5}\right) \right\}$$

$$B \times A = \left\{ \left(\frac{1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right), \left(\frac{1}{4}, 3\right), \left(\frac{1}{5}, 1\right), \left(\frac{1}{5}, 2\right), \left(\frac{1}{5}, 3\right) \right\}$$

$$B \times B = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \right\}.$$

Uwaga

W ogólności, iloczyn kartezjański nie jest przemienny, tzn. zazwyczaj
 $A \times B \neq B \times A$.

$$A \times A = A^2 \quad A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

Ogólnie:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Ćwiczenie

Zaznaczyć w układzie współrzędnych.

① $(1, 2) \times \langle -2, 1 \rangle$

② $(1, 3) \times \{-1, 1\}$

Definicja

Zdaniem logicznym nazywamy wyrażenie, o którym można jednoznacznie powiedzieć, że jest prawdziwe lub fałszywe.

Zdania logiczne oznaczamy p , q , r , ...

Definicja

Jeśli zdanie logiczne jest prawdziwe, to mówimy, że ma ono wartość logiczną 1. Jeśli natomiast jest fałszywe, to mówimy, że ma wartość logiczną 0.

Zdania logiczne można łączyć za pomocą spójników logicznych. Otrzymane zdanie nazywamy zdaniem złożonym. Jego wartość logiczna zależy od wartości logicznych poszczególnych zdań składowych.

Definicja

Negacją zdania logicznego p nazywamy zdanie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie p jest fałszywe.

Oznaczamy ją $\neg p$ i czytamy nie p .

p	$\neg p$
0	1
1	0

Definicja

Koniunkcję zdań logicznych p i q nazywamy zdanie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba te zdania są prawdziwe. Oznaczamy ją $p \wedge q$ i czytamy p i q .

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definicja

Alternatywą zdań logicznych p i q nazywamy zdanie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z tych zdań jest prawdziwe.

Oznaczamy ją $p \vee q$ i czytamy p lub q .

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definicja

Implikacją zdań logicznych p i q nazywamy zdanie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy p jest fałszywe lub q jest prawdziwe.

Oznaczamy ją $p \Rightarrow q$ i czytamy jeśli p , to q .

Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, a zdanie q jej następnikiem.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definicja

Równoważnością zdań logicznych p i q nazywamy zdanie, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdania te mają te same wartości logiczne.

Oznaczamy ją $p \Leftrightarrow q$ i czytamy p wtedy i tylko wtedy, gdy q .

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definicja

Funkcją zdaniową (jednej zmiennej) $\Phi(x)$ nazywamy wyrażenie ze zmienną x , za którą możemy podstawić elementy pewnego zbioru X i w konsekwencji otrzymać zdanie logiczne.

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji zdaniowej.

Definicja

Wyrażenie

$$\forall x \in D \Phi(x),$$

gdzie

- $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x ,
- D jest dziedziną funkcji zdaniowej Φ ,

czytamy:

dla każdego $x \in D$ zdanie $\Phi(x)$ jest prawdziwe.

Symbol $\forall$ nazywamy kwantyfikatorem ogólnym.

Definicja

Wyrażenie

$$\exists x \in D \Phi(x),$$

gdzie

- $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x ,
- D jest dziedziną funkcji zdaniowej Φ ,

czytamy:

istnieje $x \in D$ takie, że zdanie $\Phi(x)$ jest prawdziwe.

Symbol $\exists$ nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym.

Zazwyczaj twierdzenia są postaci "jeśli p , to q ", tzn.

$$p \Rightarrow q.$$

Uwaga

Twierdzenie odwrotne do $p \Rightarrow q$, tzn. twierdzenie $q \Rightarrow p$, nie zawsze jest prawdziwe.

Przykład

Zdanie

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

jest prawdziwe, ale zdanie odwrotne

$$x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$$

jest fałszywe.

$$p \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \qquad q$$

p jest wystarczający dla q q jest konieczny dla p

Uwaga

Zdanie $p \Rightarrow q$ jest równoważne zdaniu $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Jeśli oba zdania $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$ są prawdziwe, to piszemy

$$p \Leftrightarrow q$$

(p wtedy i tylko wtedy, gdy q , p wtw. q).

W takim przypadku p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q , a q jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla p .