

# Wykład 2

## Funkcje elementarne

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik  
Katedra Matematyki

## Definicja

*Funkcją  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  nazywamy dowolne przyporządkowanie (dokładnie) jednego elementu ze zbioru  $Y$  każdemu elementowi zbioru  $X$ .*

$$f : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

$x$  – argument

$y = f(x)$  – wartość  $f$  w punkcie  $x$

## Uwaga

*Symbol  $f$  odnosi się do funkcji, podczas, gdy  $f(x)$  to wartość funkcji  $f$  w punkcie  $x$ . (Zatem  $f \neq f(x)$ !)*

$X, D, D_f$  – dziedzina funkcji  $f$

$Y$  – przeciwdziedzina  $f$

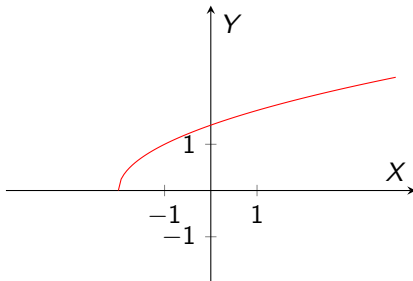
$R := \{y \in Y : y = f(x) \text{ dla pewnego } x \in X\}$ ,  $R, R_f$  – zbiór wartości  $f$

## Uwaga

Często  $Y \neq R$ .

## Przykład

Niech  $f$  będzie zdefiniowana za pomocą wzoru  $f(x) = \sqrt{x+2}$ .  
Wtedy  $D_f = \langle -2, \infty \rangle$ ,  $Y_f = \mathbb{R}$ , ale  $R_f = \langle 0, \infty \rangle$ .



Niech  $f$  będzie funkcją rzeczywistą, tzn. jej dziedzina i przeciwdziedzina są zawarte w  $\mathbb{R}$ .

Jeśli dziedzina nie jest podana, to zakładamy, że dziedziną  $f$  jest największy podzbiór  $\mathbb{R}$ , dla którego wzór  $f$  ma sens. Mówimy wtedy, że jest to **dziedzina naturalna**  $f$ .

## Ćwiczenie

Wyznaczyć dziedzinę  $f$ .

①  $f(x) = 2\sqrt{x^2-9} + \frac{1}{x+5}$

②  $f(x) = \log_4(-x^2 - 4x - 3) + \operatorname{tg}(2x)$

Niech  $f$  będzie funkcją  $n$  zmiennych rzeczywistych ( $n \in \mathbb{N}$  jest ustalone,  $n \geq 2$ ).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$$

## Ćwiczenie

Wyznaczyć dziedzinę  $f$ .

❶  $f(x, y) = e^{\sqrt{2y}} \sin x + \log_4(y - x^2)$

❷  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3 - |x + 2y|}} + \frac{1}{\log_3^2(x(3 - x)) + 4}$

# Surjektywność

## Definicja

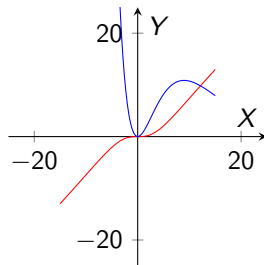
Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie funkcją i niech  $R$  oznacza jej zbiór wartości.  
Jeśli  $Y = R$ , tzn.

$$\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y,$$

to mówimy, że  $f$  jest *surjekcją/funkcją "na"*.

## Przykład

Niech  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będą zadane  
następująco:  $f_1(x) = \frac{x^3}{x^2+35}$ ,  
 $f_2(x) = x^2 \cdot 0.8^x$ . Funkcja  $f_1$  jest  
surjekcją, a  $f_2$  nie.



# Injektywność

## Definicja

Jeśli  $f : X \rightarrow Y$  różnym elementom  $X$  przyporządkowuje różne elementy zbioru  $Y$ , tzn.

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

lub równoważnie

$$\forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),$$

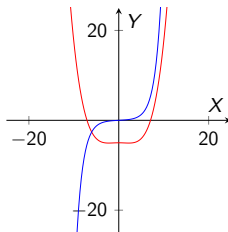
to mówimy, że  $f$  jest *injekcją/funkcją różnowartościową*.

## Przykład

Niech  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będą zdefiniowane następująco:

$$f_1(x) = \frac{x^4}{100} - \frac{x^2}{10} - 5,$$

$f_2(x) = 2^x - 2^{-x} + 8$ . Funkcja  $f_2$  jest różnowartościowa, a  $f_1$  nie.



# Injektywność

## Przykład

*Sprawdzimy czy  $f$  jest różnowartościowa, jeśli  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ .*

*Zauważmy, że  $D_f = \mathbb{R}$ .*

*Założmy, że  $x_1, x_2 \in D_f$  są takie, że  $f(x_1) = f(x_2)$ .*

*Wtedy*

$$\frac{x_1}{x_1^2+2} = \frac{x_2}{x_2^2+2} \Leftrightarrow x_1x_2^2 + 2x_1 = x_1^2x_2 + 2x_2$$

$$x_1x_2^2 - x_1^2x_2 + 2x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2(x_2 - x_1) + 2(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1x_2 - 2)(x_2 - x_1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1x_2 = 2).$$

*Zatem, jeśli przyjmiemy  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ , to*

$$f(x_1) = f(1) = \frac{1}{3} = f(2) = f(x_2).$$

*Stąd  $f$  nie jest różnowartościowa.*



# Injektywność

## Przykład

*Sprawdzimy czy  $f$  jest różnowartościowa, jeśli  $f(x) = x^3 + 3x$ .*

*Mamy  $D_f = \mathbb{R}$ .*

*Założmy, że  $x_1, x_2 \in D_f$  i  $f(x_1) = f(x_2)$ . Wtedy*

$$x_1^3 + 3x_1 = x_2^3 + 3x_2 \Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 + 3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 3(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3) = 0$$

*Ponieważ*

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 3,$$

*drugie wyrażenie nie może być równe 0, więc  $x_1 = x_2$ . Ponieważ z  $f(x_1) = f(x_2)$  otrzymaliśmy  $x_1 = x_2$ , funkcja  $f$  jest różnowartościowa.*

# Bijektywność i funkcja odwrotna

## Definicja

Jeśli  $f$  jest *injekcją i surjekcją*, to mówimy, że  $f$  jest *bijekcją*.

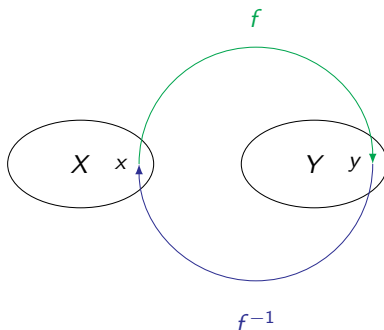
# Bijektywność i funkcja odwrotna

## Definicja

Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie funkcją. Jeśli istnieje funkcja  $g : Y \rightarrow X$  taka, że

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y,$$

to mówimy, że  $g$  jest *funkcją odwrotną* do  $f$  i piszemy  $g = f^{-1}$ .



# Bijektywność i funkcja odwrotna

## Uwaga

*Nie wszystkie funkcje mają funkcje odwrotne.*

## Twierdzenie

*Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  ma funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy  $f$  jest bijekcją.*

# Bijektywność i funkcja odwrotna

## Ćwiczenie

Wyznaczyć  $f^{-1}$ , gdzie  $f$  jest zadana jak poniżej.

①  $f(x) = \sqrt[5]{2x - 4}$

②  $f(x) = 4^{\frac{x-2}{5}}$

③  $f(x) = x^6 + 2$

# Bijektywność i funkcja odwrotna

## Uwaga

Jeśli punkt  $(x, y)$  należy do wykresu funkcji  $f$ , to punkt  $(y, x)$  należy do wykresu funkcji  $f^{-1}$ .

Definicje i  
własności

Funkcje  
elementarne

Definicja

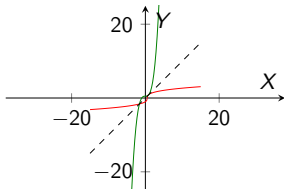
Przykłady

## Wniosek

Wykresy funkcji wzajemnie odwrotnych są symetryczne względem prostej  $y = x$ .

## Przykład

Funkcja  $f$  zdefiniowana za pomocą wzoru  $f(x) = 4\sqrt[3]{2x-1}$ , natomiast funkcja do niej odwrotna:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{4} \right)^3 + 1 \right]$ . Dla tych funkcji:



# Złożenie

## Definicja

Założmy, że  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow Z$ . *Złożeniem funkcji  $g$  i  $f$  nazywamy funkcję  $h : X \rightarrow Z$  zdefiniowaną za pomocą wzoru  $h(x) = g(f(x))$ .*

*Piszemy wtedy  $h = g \circ f$ , a funkcje  $f$  i  $g$  nazywamy funkcją wewnętrzną i zewnętrzną, odpowiednio.*

## Przykład

*Niech  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami takimi, że  $f(x) = x^4 + 2x$ ,  $g(x) = \sin(2x)$ . Wtedy*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(2(x^4 + 2x)) = \sin(2x^4 + 4x),$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin(2x))^4 + 2(\sin(2x)) = \sin^4(2x) + 2\sin(2x).$$

## Uwaga

*Zazwyczaj  $f \circ g \neq g \circ f$ .*

## Przykład

Zapiszmy  $h$  jako złożenie funkcji  $g$  i  $f$ .

$$\textcircled{1} \quad h(x) = \cos^4 x, \quad f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^4$$

$$\textcircled{2} \quad h(x) = 6^{(3x-1)^2}, \quad f(x) = (3x-1)^2, \quad g(x) = 6^x$$

## Twierdzenie

Założmy, że  $f : X \rightarrow Y$  ma funkcję odwrotną. Wtedy  
 $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  dla wszystkich  $x \in X$  oraz  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  dla  
wszystkich  $y \in Y$ .



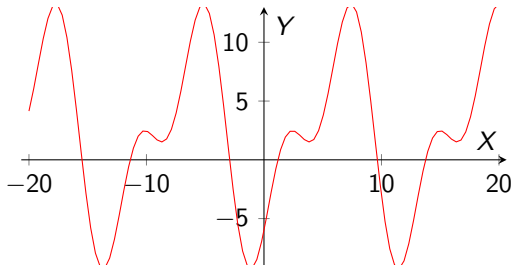
# Okresowość

## Definicja

Funkcję  $f$  nazywamy *okresową*, jeśli istnieje liczba  $T \neq 0$  taka, że

$$\forall x \in D \ (x + T \in D \wedge f(x + T) = f(x)).$$

Każdą liczbę  $T$  spełniającą tę zależność nazywamy *okresem* funkcji  $f$ .  
Jeśli istnieje najmniejszy dodatni okres funkcji  $f$ , to nazywamy go *okresem podstawowym*.



# Monotoniczność

## Definicja

Funkcja  $f$  jest *rosnąca na zbiorze*  $A \subseteq D_f$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

## Definicja

Funkcja  $f$  jest *malejąca na zbiorze*  $A \subseteq D_f$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

## Definicja

Funkcja  $f$  jest *niemalejąca na zbiorze*  $A \subseteq D_f$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

## Definicja

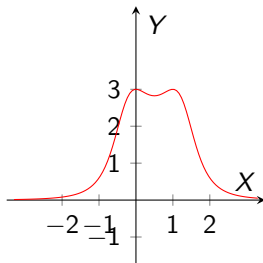
Funkcja  $f$  jest *nierosnąca na zbiorze*  $A \subseteq D_f$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

# Monotoniczność

## Przykład

Rozważmy  $f$  o poniższym wykresie.



$$y = \frac{3}{(x^2 - x)^2 + 1}$$

Ta funkcja jest rosnąca w przedziałach  $(-\infty, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ , a malejąca w przedziałach  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(1, \infty)$ .

## Uwaga

Należy pamiętać, że z tego, że  $f$  jest rosnąca (malejąca) na zbiorach  $A_1$  i  $A_2$  nie wynika, że  $f$  jest rosnąca (malejąca) na  $A_1 \cup A_2$ .

# Monotoniczność

## Definicja

Jeśli  $f$  jest rosnąca/malejąca/nierosnąca/niemalejąca w całej dziedzinie, to mówimy, że  $f$  jest *monotoniczna*.

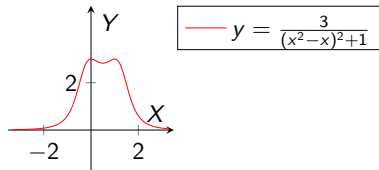
Ponadto, jeśli  $f$  jest rosnąca/malejąca, to mówimy, że  $f$  jest *ściśle monotoniczna*.

## Definicja

Jeśli dziedzinę  $f$  można podzielić na rozłączne przedziały na których  $f$  jest monotoniczna, to mówimy, że  $f$  jest *monotoniczna przedziałami*.

## Przykład

Funkcja  $f$  z poprzedniego przykładu nie jest monotoniczna, ale jest *przedziałami monotoniczna*.



# Monotoniczność

## Przykład

*Udowodnimy, że  $f$  zadana wzorem  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  jest rosnąca na przedziale  $(1, \infty)$ .*

*Wystarczy udowodnić, że z  $x_2 > x_1$  ( $x_2, x_1 > 1$ ) wynika  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .*

*Założmy, że  $x_2 > x_1 > 1$ . Rozpiszmy różnicę  $f(x_2) - f(x_1)$  w taki sposób, że będzie można sprawdzić znak tego wyrażenia.*

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^4 - 2x_2^2 + 3) - (x_1^4 - 2x_1^2 + 3) \\ &= x_2^4 - x_1^4 - 2(x_2^2 - x_1^2) \\ &= (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) - 2(x_2^2 - x_1^2) \\ &= (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2 - 2) \end{aligned}$$

*Zauważmy, że z  $x_2 > x_1$  oraz tego, że obie te liczby są dodatnie, mamy  $x_2^2 - x_1^2 > 0$ .*

*Ponadto, ponieważ  $x_1, x_2 > 1$ , mamy  $x_1^2 + x_2^2 - 2 > 1^2 + 1^2 - 2 = 0$ . Zatem  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ . Oznacza to, że  $f$  jest rosnąca na  $(1, \infty)$ .*

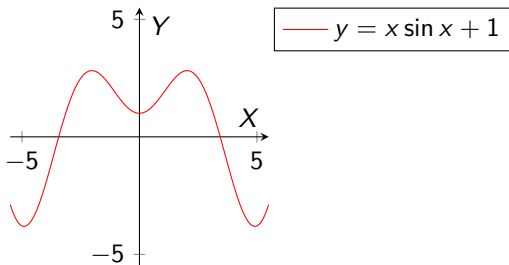
# Parzystość

## Definicja

Funkcję  $f$  nazywamy *parzystą*, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall x \in D_f \quad (-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)).$$

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi  $OY$ .



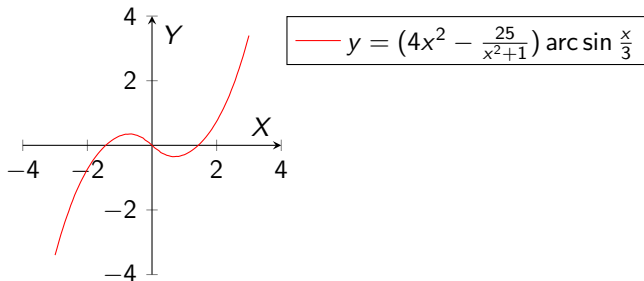
# Parzystość

## Definicja

Funkcję  $f$  nazywamy *nieparzystą*, jeśli

$$\forall x \in D_f \quad (-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)).$$

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.



# Parzystość

## Ćwiczenie

*Sprawdzić czy  $f$  jest parzysta lub nieparzysta.*

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{|x| \sin x}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = x^3(4^x - 4^{-x})$$

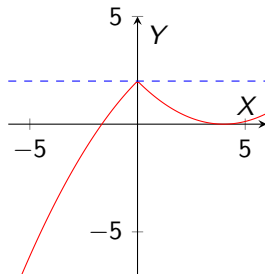
$$\textcircled{3} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$



# Ograniczoność

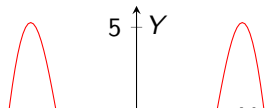
## Definicja

Funkcję  $f$  nazywamy *ograniczoną z góry*, jeśli istnieje taka liczba  $M$ , że dla dowolnego  $x \in D_f$  spełniona jest nierówność  $f(x) < M$ .



## Definicja

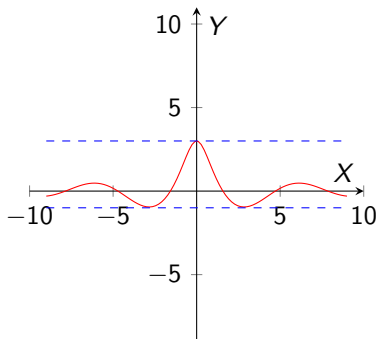
Funkcję  $f$  nazywamy *ograniczoną z dołu*, jeśli istnieje liczba  $m$  taka, że dla dowolnego  $x \in D_f$



# Ograniczoność

## Definicja

*Funkcję  $f$  nazywamy  
**ograniczoną**, jeśli jest  
ograniczona z góry i z dołu.*



# Szkicowanie wykresów

## Przekształcenie wykresu

przesunięcie o wektor  $[p, q]$

skalowanie wzgl. osi  $OX$

skalowanie wzgl. osi  $OY$

odbicie wzgl. osi  $OY$

odbicie wzgl. osi  $OX$

## Przekształcenie wzoru

$$y = f(x) \rightarrow y = f(x - p) + q$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(\alpha x) \quad (\alpha > 0)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = \alpha f(x) \quad (\alpha > 0)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$$

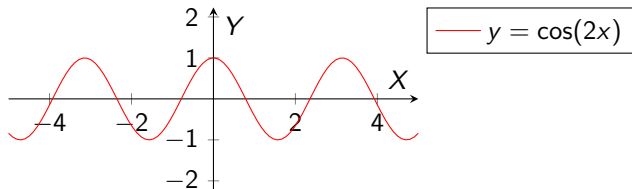
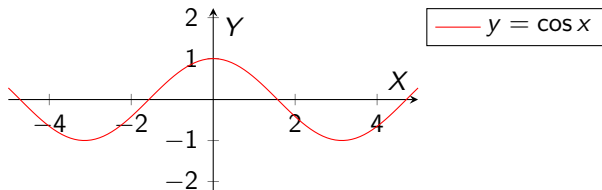
## Inne przekształcenia:

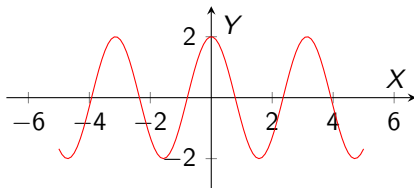
- $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$
- $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$

## Przykład

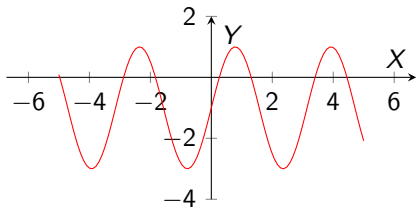
Naszkicować wykres funkcji  $f(x) = 2 \cos \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - 1$ .

$$f(x) = 2 \cos \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - 1 = 2 \cos \left( 2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) - 1$$





$$y = 2 \cos(2x)$$



$$y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

## Definicja

*Funkcje  $U, id, \exp, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wymienione poniżej*

- $U(x) = 1$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (funkcja jednostkowa),
- $id(x) = x$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (funkcja tożsamościowa),
- $\exp(x) = e^x$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (funkcja wykładnicza o podstawie  $e$ ),
- $\sin(x) = \sin x$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (funkcja sinus)

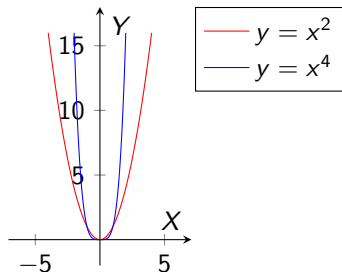
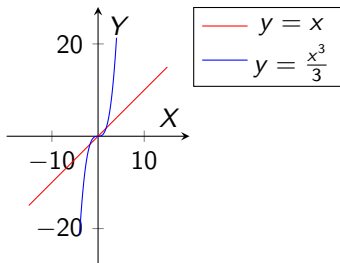
nazywamy *funkcjami elementarnymi z deklaracji*.

## Definicja

*Funkcją elementarną jest każda funkcja*

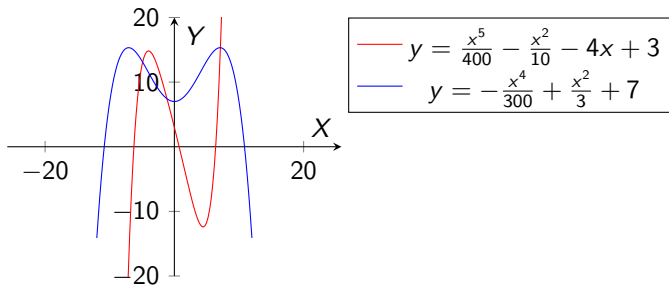
- elementarna z deklaracji,
- będąca iloczynem stałej i funkcji elementarnej,
- suma, różnica, iloczyn, iloraz funkcji elementarnych,
- złożenie funkcji elementarnych,
- funkcja odwrotna do funkcji elementarnej,
- funkcja elementarna z zawężoną dziedziną.

- funkcja potęgowa  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

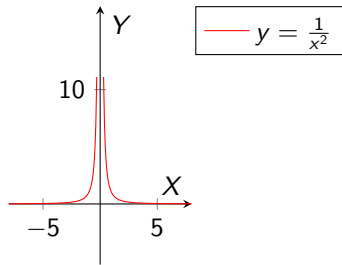
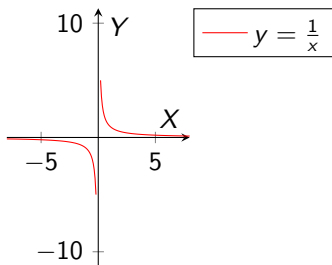


- funkcja wielomianowa

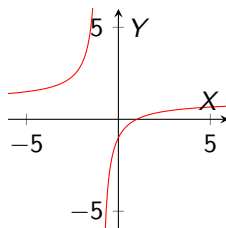
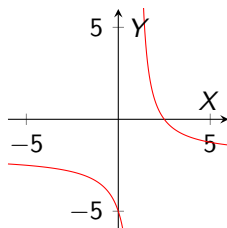
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$



- funkcja potęgowa  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

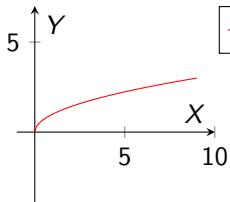


- homografia  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $ad \neq bc$ )

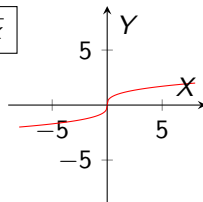




- funkcja potęgowa  $f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$

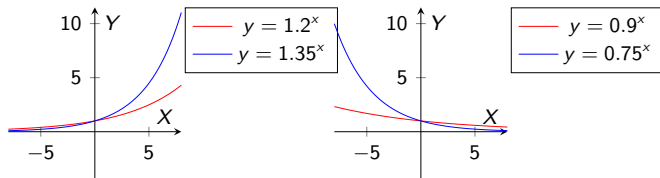


$$y = \sqrt{x}$$

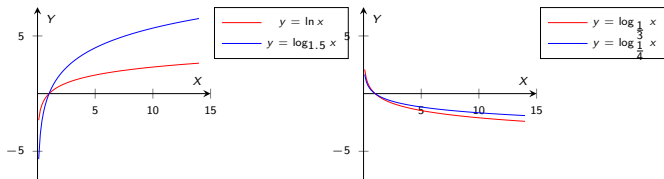


$$y = \sqrt[3]{x}$$

- funkcja wykładnicza  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$



- funkcja logarytmiczna  $f(x) = \log_a x$   $a > 0$ ,  $a \neq 1$



## Uwaga

Funkcja wykładnicza  $f$  taka, że  $f(x) = a^x$  i funkcja logarytmiczna  $g$  taka, że  $g(x) = \log_a x$  są wzajemnie odwrotne.

## Własności potęg i logarytmów

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \quad \log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c} \quad \log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

$$(a^b)^c = a^{bc} \quad \log_a b^k = k \cdot \log_a b$$

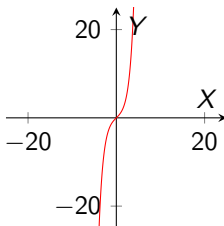
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

### Uwaga

$\log_e x$  oznaczamy  $\ln x$

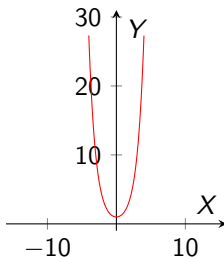
- sinus hiperboliczny

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



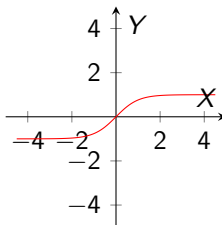
- cosinus hiperboliczny

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



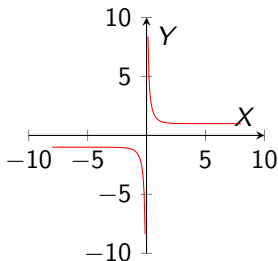
- tangens hiperboliczny

$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$



- cotangens hiperboliczny

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh} x}$$



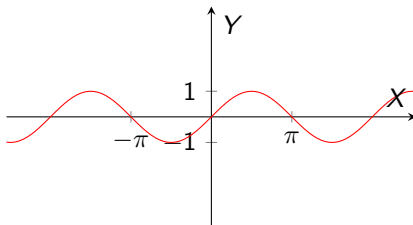
# Własności funkcji hiperbolicznych

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

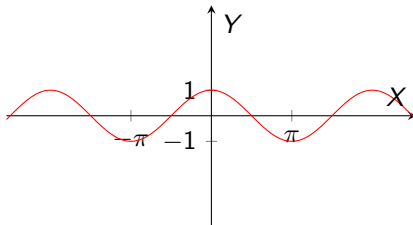
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

- sinus  $f(x) = \sin x$

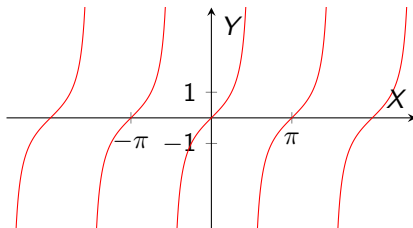


- cosinus  $f(x) = \cos x$



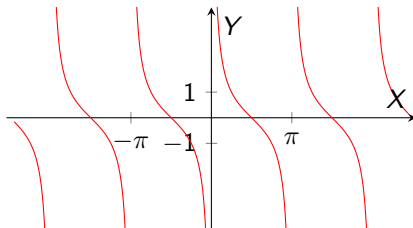
- tangens

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



- cotangens

$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$





## Własności funkcji trygonometrycznych

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

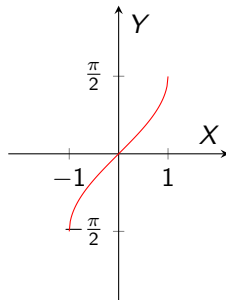
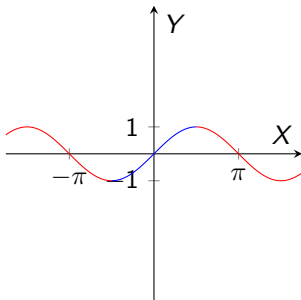
Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe. Zatem, nie posiadają funkcji odwrotnych.

Jednak, jeśli zawężymy ich dziedziny, otrzymamy funkcje różnowartościowe, które mają funkcje odwrotne.

## Definicja

*Dla dowolnego  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  definiujemy arcus sinus  $x$  następująco:*

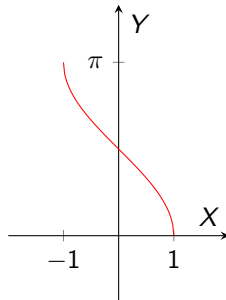
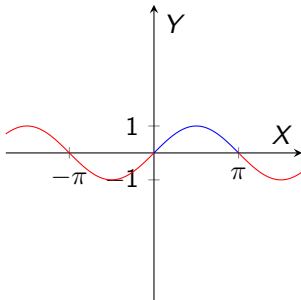
$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad (x = \sin y \text{ oraz } y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle)$$



## Definicja

Dla dowolnego  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  definiujemy arcus cosinus  $x$  następująco:

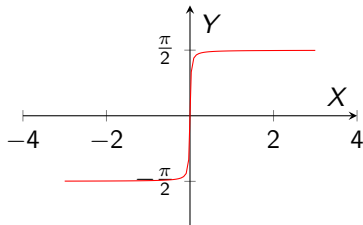
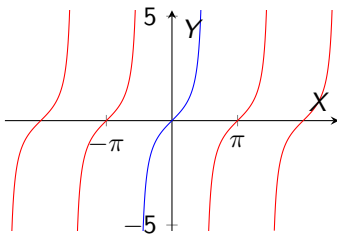
$$y = \arccos x \Leftrightarrow (x = \cos y \text{ oraz } y \in \langle 0, \pi \rangle)$$



## Definicja

Dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  definiujemy arcus tangens  $x$  następująco:

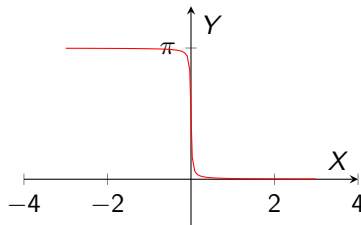
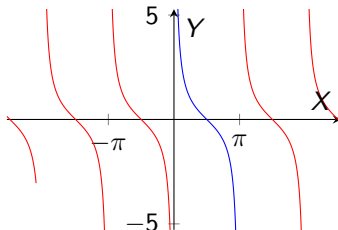
$$y = \arctg x \Leftrightarrow (x = \operatorname{tg} y \text{ oraz } y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$



## Definicja

*Dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  definiujemy arcus cotangens  $x$  następująco:*

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \Leftrightarrow (x = \operatorname{ctg} y \text{ oraz } y \in (0, \pi))$$



## Ćwiczenie

Wyznaczyć dokładną wartość  $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$ .

## Ćwiczenie

Wyznaczyć dziedzinę funkcji  $f$ , gdzie  $f(x) = \sqrt{\arcsin(1 - \ln 2x)}$ .