

# Wykład 3

## Przestrzenie metryczne

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik  
Katedra Matematyki

## Definicja

Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym. *Metryką* na zbiorze  $X$  nazywamy dowolną funkcję  $d : X \times X \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ , która dla dowolnych  $x, y, z \in X$  spełnia następujące warunki:

- ❶  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- ❷  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- ❸  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

## Definicja

*Przestrzenią metryczną* nazywamy uporządkowaną parę  $(X, d)$ , gdzie  $X$  jest niepustym zbiorem, a  $d$  metryką określoną na tym zbiorze. Elementy przestrzeni  $X$  nazywamy punktami, natomiast wartość  $d(x, y)$  odległością między punktami  $x, y$ .

## Przykład

*Jeśli  $X$  jest dowolnym zbiorem, to następującą metrykę:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x = y \\ 1 & \text{gdy } x \neq y \end{cases}$$

*nazywamy metryką dyskretną lub zero-jedynkową.*

## Przykład

*Dla  $X = \mathbb{R}^n$  funkcja  $d$  taka, że*

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)) = |x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2| + \dots + |x_n - x'_n|$$

*jest metryką.*

## Metryki euklidesowe

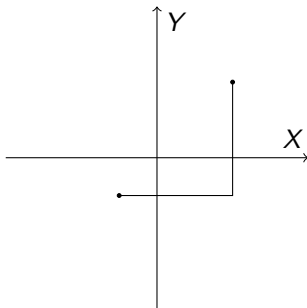
- $X = \mathbb{R}, d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$
- $X = \mathbb{C}, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$
- $X = \mathbb{R}^2, d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- $X = \mathbb{R}^n,$   
 $d((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$

# Metryki nieeuklidesowe

## Przykład

*Metryka taksówkowa:*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

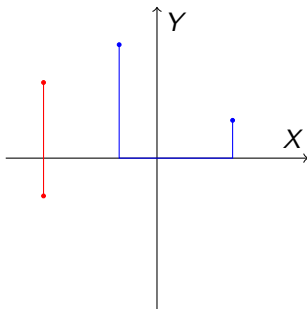


# Metryki nieeuklidesowe

## Przykład

*Metryka rzeka:*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{gdy } x_1 = x_2 \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & \text{gdy } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

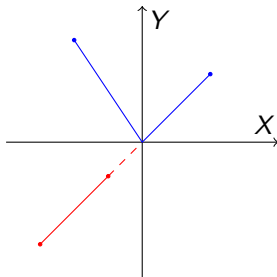


# Metryki nieeuklidesowe

## Przykład

*Metryka centrum:*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \text{gdy } O, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ są współliniowe} \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ \text{gdy } O, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ nie są współliniowe} \end{cases}$$



## $X$ - przestrzeń metryczna

### Definicja

*Kulą o środku  $P$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór*

$$B(P, r) = \{Q \in X : d(P, Q) < r\}$$

### Ćwiczenie

*W  $\mathbb{R}^2$  z metrykami*

- ① *euklidesową,*
- ② *dyskretną,*
- ③ *taksówkową,*
- ④ *rzeką*  
*naszkicować kulę  $B((1, 1), 3)$ .*



$X$  - przestrzeń metryczna

## Definicja

*Otoczeniem punktu  $P$  nazywamy dowolną kulę o środku w  $P$ .*

## Definicja

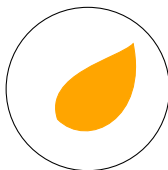
*Sąsiedztwem punktu  $P$  nazywamy dowolną kulę o środku w  $P$  bez tego środka.*

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

Zbiór  $S$  nazywamy *ograniczonym*, jeśli jest on zawarty w pewnej kuli.



$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

*Punkt  $P$  nazywamy **punktem skupienia** zbioru  $S$ , jeśli w dowolnym sąsiedztwie punktu  $P$  znajduje się co najmniej jeden punkt ze zbioru  $S$ .*

## Ćwiczenie

*Wyznaczyć punkty skupienia zbiorów*

- ❶  $(0, 1)$
- ❷  $\langle 0, 1 \rangle$
- ❸  $\mathbb{Q} \cap \langle 0, 1 \rangle$

*w  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową.*

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

Zbiór  $S$  nazywamy *domkniętym*, jeśli zawiera on wszystkie swoje punkty skupienia.

## Definicja

*Domknięciem* zbioru  $S$  nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający  $S$ . Domknięcie zbioru  $S$  oznaczamy  $cl(S)$ .

## Ćwiczenie

W  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową wyznaczyć  $cl(S)$ , jeśli

- 1  $S = (-2, 3) \cup (3, 7)$ ,
- 2  $S = \mathbb{Q}$ .

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

Punkt  $P$  nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru  $S$ , jeśli istnieje otoczenie punktu  $P$ , które jest całkowicie zawarte w  $S$ .

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru  $S$  nazywamy jego *wnętrzem*. Oznaczamy je  $\text{int}(S)$ .

## Ćwiczenie

W  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową wyznaczyć  $\text{int}(S)$ , jeśli

❶  $S = \langle -2, 1 \rangle$ ,

❷  $S = \mathbb{Q}$ .

## Definicja

Zbiór  $S$  nazywamy *otwartym*, jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym  $S$ .

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

*Punkt  $P$  nazywamy **punktem izolowanym** zbioru  $S$ , gdy istnieje pewne sąsiedztwo  $P$ , które nie zawiera punktów zbioru  $S$ .*

## Przykład

*Punkt 3 jest punktem izolowanym zbioru  $(-1, 1) \cup \{3\}$ .*

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

*Punkt  $P$  nazywamy **punktem brzegowym** zbioru  $S$ , jeśli w każdym otoczeniu punktu  $P$  znajduje się co najmniej jeden punkt należący do  $S$  i co najmniej jeden punkt nie należący do  $S$ .*

*Zbiór punktów brzegowych zbioru  $S$  nazywamy jego **brzegiem** i oznaczamy  $bd(S)$  (lub  $\partial(S)$ ).*

$X$  - przestrzeń metryczna

$$S \subseteq X$$

## Definicja

Zbiór  $S$  nazywamy *spójnym*, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch niepustych i rozłącznych zbiorów otwartych.

## Przykład

W  $\mathbb{R}$  z metryką euklidesową każdy przedział jest spójny.

## Uwaga

Podzbiór  $\mathbb{R}^2$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa punkty tego zbioru można połączyć krzywą całkowicie zawartą w tym zbiorze.



## Definicja

*Obszarem* nazywamy dowolny niepusty, otwarty i spójny podzbiór  $S$  zbioru  $\mathbb{R}^2$ .

## Definicja

*Obszarem domkniętym* nazywamy zbiór postaci  $cl(S)$ , gdzie  $S$  jest pewnym obszarem.