

Wykład 1

Liczby zespolone

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik
Katedra Matematyki

Definicja

Liczbę postaci

$$z = a + bi, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \quad (1)$$

nazywamy *liczbą zespoloną*.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}$.

Postać (1) nazywamy *postacią algebraiczną* (lub kanoniczną) liczby zespolonej z .

Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby z i oznaczamy $\Re(z)$, natomiast liczbę b nazywamy *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy $\Im(z)$.

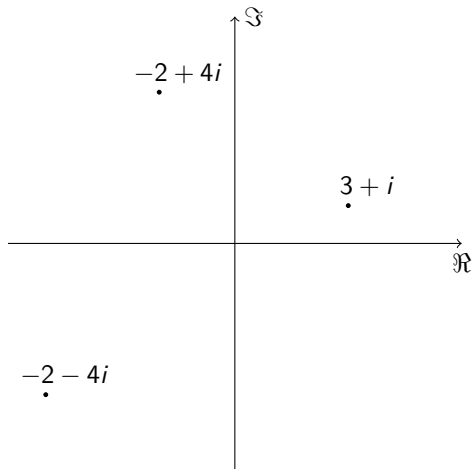
Liczbę i nazywamy jednostką urojoną.

Definicja

Mówimy, że dwie liczby zespolone z_1, z_2 są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe, tzn.

$$\Re(z_1) = \Re(z_2) \quad \wedge \quad \Im(z_1) = \Im(z_2).$$

Liczby zespolone zaznaczamy na płaszczyźnie nazywanej **płaszczyzną Gaussa**.



Definicja

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Ich **sumą** nazywamy liczbę

$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$

Przykład

Niech $z = 3 - 4i$, $w = 5 + 2i$. Wtedy

$$z + w = (3 - 4i) + (5 + 2i) = (3 + 5) + (-4 + 2)i = 8 - 2i.$$

Definicja

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Ich *iloczynem* nazywamy liczbę

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Przykład

Niech $z = 2 + i$, $w = 3 - 2i$. Wtedy

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + i)(3 - 2i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2i) + i \cdot 3 + i \cdot (-2i) \\ &= 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 6 - i - 2(-1) = 8 - i. \end{aligned}$$

Definicja

Niech $z = a + bi$, $w = c + di$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej. Załóżmy, że $w \neq 0$. Ilorazem liczb z , w nazywamy liczbę

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Przykład

Dla $z = 4 - 3i$, $w = 1 + i$, mamy

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{4-3i}{1+i} = \frac{(4-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-4i-3i+3i^2}{1-i^2} = \frac{4-7i-3}{1-(-1)} \\ &= \frac{1-7i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i.\end{aligned}$$

Definicja

Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$\bar{z} = a - bi.$$

Przykład

❶ $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

❷ $\overline{2 - 12i} = 2 + 12i$

❸ $\overline{3i} = -3i$

❹ $\overline{5} = 5$

Definicja

Niech $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Liczbę

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nazywamy *modułem* liczby zespolonej z .

Przykład

Jeśli $z = 2 + 3i$, to $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Uwaga

Moduł dowolnej liczby zespolonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną.

- Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych są łączne i przemienne.
- Mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbb{C}$ spełnione są (nie)równości

$$\textcircled{1} \Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w)$$

$$\textcircled{2} \Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w)$$

$$\textcircled{3} (\bar{\bar{z}}) = z$$

$$\textcircled{4} \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\textcircled{5} \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

$$\textcircled{6} |\bar{z}| = |z|$$

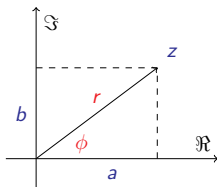
$$\textcircled{7} |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\textcircled{8} \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$\textcircled{9} z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\textcircled{10} |z + w| \leq |z| + |w| \text{ (nierówność trójkąta)}$$

$$\textcircled{11} ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$



$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \phi = \frac{a}{r}, \quad \sin \phi = \frac{b}{r}$$

$$r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z = r \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} i \right) = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (2)$$

Definicja

Postać (2) nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby z .

Każdą liczbę ϕ spełniającą (2) nazywamy *argumentem* z i oznaczamy $\arg(z)$.

Argument z należący do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczamy $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Definicja

Dodatkowo przyjmujemy, że $\text{Arg}(0) = 0$.

Twierdzenie

Niech z, w będą liczbami zespolonymi różnymi od 0. Wtedy

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |w| \wedge \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w).$$

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby zespolonej z : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Twierdzenie

Niech $z = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $w = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$. Wtedy

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).$$

Twierdzenie (Wzór Moivre'a)

Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ będzie niezerową liczbą zespoloną w postaci trygonometrycznej. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

Wniosek

Jeśli $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ będzie niezerową liczbą zespoloną w postaci trygonometrycznej, to dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)).$$

Przykład

Obliczymy $(1 - i)^{10}$.

Najpierw zapisujemy $z = 1 - i$ w postaci trygonometrycznej:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \phi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \phi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{4},$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Następnie stosujemy wzór Moivre'a:

$$\begin{aligned} z^{10} &= (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \left(10 \cdot \frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(10 \cdot \frac{-\pi}{4} \right) \right) \\ &= (2^{\frac{1}{2}})^{10} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{2} \right) \right) = 2^5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= 32(0 - 1 \cdot i) = -32i. \end{aligned}$$

Definicja

Liczbę $w \in \mathbb{C}$ nazywamy pierwiastkiem stopnia n -tego ($n \in \mathbb{N}$) z liczby $z \in \mathbb{C}$, jeśli $z^n = w$.

Przykład

Liczba i jest pierwiastkiem z -1 , bo $i^2 = -1$.

Liczba $-i$ również jest pierwiastkiem z -1 , bo $(-i)^2 = -1$.

Uwaga

Jedynym pierwiastkiem z 0 jest 0 .

Twierdzenie

Niech $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ będzie niezerową liczbą zespoloną. Pierwiastki stopnia n z liczby z wyrażają się za pomocą wzoru

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

- Każda liczba zespolona różna od 0 ma dokładnie n pierwiastków stopnia n .
- Pierwiastki stopnia n z danej różnej od 0 liczby zespolonej leżą na okręgu o środku w liczbie 0 i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$. Jeśli połączymy te pierwiastki, otrzymamy n -kąt foremny.

Przykład

Obliczmy pierwiastki stopnia trzeciego z liczby $-8i$.
Zapisujemy $z = -8i$ w postaci trygonometrycznej:

$$r = |z| = 8$$

$$\cos \phi = \frac{0}{8} = 0, \quad \sin \phi = \frac{-8}{8} = -1 \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{2}$$

$$z = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

i wstawiając do wzoru otrzymujemy pierwiastki:

$$w_0 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + 1 \cdot i) = 2i$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi+2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi+2\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi+4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi+4\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Twierdzenie (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

Każdy wielomian stopnia n o współczynnikach zespolonych ma n pierwiastków zespolonych.

Definicja

Niech $\phi \in \mathbb{R}$. Liczbę $e^{i\phi}$ definiujemy następująco:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

$$z = |z|e^{i\phi} \tag{3}$$

Postać (3) nazywamy **postacią wykładniczą** liczby z .

Niech $z = r_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = r_2 e^{i\beta}$ będą dane w postaci wykładniczej. Wtedy

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\alpha})(r_2 e^{i\beta}) = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$z_1^n = (r_1 e^{i\alpha})^n = r_1^n e^{in\alpha}.$$

Wzory Eulera

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$