

Wykład 5

Granica funkcji

Teleinformatyka, AMiA, AEil, 2022/23

dr inż. Roksana Słowik
Katedra Matematyki

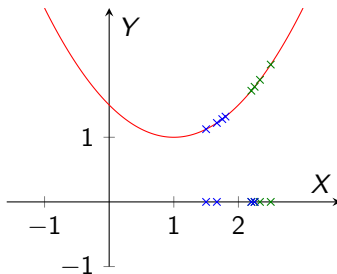
$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , (Y, d_Y) - przestrzenie metryczne

Definicja (Heinego funkcji w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę równą L , jeżeli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n \neq a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L \right).$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.



$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , (Y, d_Y) - przestrzenie metryczne

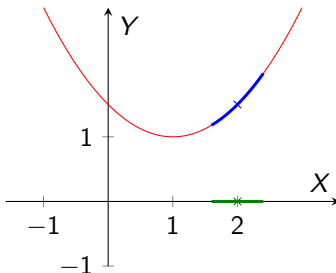
Definicja (Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie)

Mówimy, że f ma granicę w punkcie a równą L , jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L) < \epsilon)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



Twierdzenie

Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji w punkcie są równoważne.

Twierdzenie

Przypuśćmy, że f i g są funkcjami takimi, że a jest punktem skupienia obu dziedzin. Załóżmy ponadto, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_f$ i

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_g$. Wtedy

- ❶ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g,$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha \cdot f(x)) = \alpha \cdot L_f$ dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R},$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$
- ❹ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_f}{L_g}$ pod warunkiem, że $L_g \neq 0, g(x) \neq 0.$

Ćwiczenie

Obliczyć.

$$\begin{aligned} 1 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{2x+1} \\ 2 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \\ 3 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}}{x} \\ 4 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

$$5 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{x+y}{x-y}$$

$$6 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$$

$$7 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Niech f , g , h będą funkcjami rzeczywistymi takimi, że a jest punktem skupienia wszystkich dziedzin. Załóżmy, że dla wszystkich x z pewnego otoczenia a , mamy $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, to $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Ćwiczenie

Obliczyć.

1 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{\frac{1}{x^2 + 2x}}$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x^2}$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} - 1$

$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (Y, d_Y) - przestrzeń metryczna

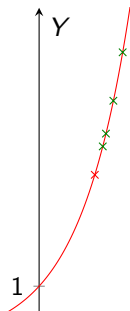
Definicja (Heinego granicy prawostronnej w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę prawostronną równą L_r , jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n > a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_r \right).$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_r$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (Y, d_Y) - przestrzenie metryczne

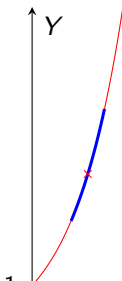
Definicja (Cauchyego granicy prawostronnej funkcji w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę prawostronną równą L_r , jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a < x < a + \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L_r) < \epsilon)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_r$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (Y, d_Y) - przestrzeń metryczna

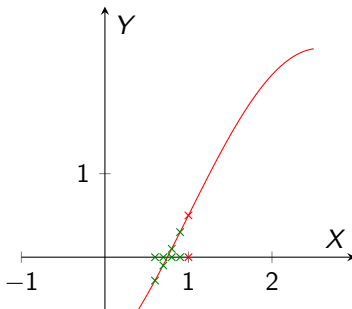
Definicja (Heinego granicy lewostronnej funkcji w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę lewostronną równą L_l , jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n < a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_l \right).$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_l$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (Y, d_Y) - przestrzeń metryczna

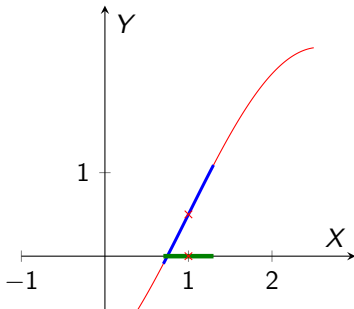
Definicja (Cauchy'ego granicy lewostronnej funkcji w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę lewostronną równą L_l , jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a - \delta < x < a \Rightarrow d_Y(f(x), L_l) < \epsilon)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_l$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



Twierdzenie

Niech $f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, i niech a będzie punktem skupienia D .
Granica funkcji f w punkcie a istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy granice prawostronna i lewostronna istnieją i są sobie równe.

Uwaga

Jeżeli dziedziną f jest przedział (a, b) (lub $\langle a, b \rangle$, $(a, b]$, $\langle a, b \rangle$), to przyjmujemy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzenie metryczne

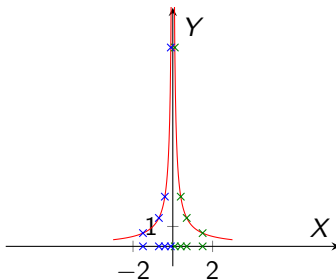
Definicja (Heinego granicy niewłaściwej ∞ w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę niewłaściwą ∞ , jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n \neq a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \right).$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzenie metryczne

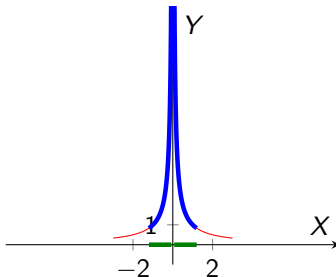
Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej ∞ w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę niewłaściwą ∞ , jeśli

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (d_X(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzenie metryczne

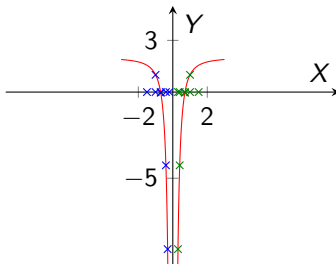
Definicja (Heinego granicy niewłaściwej $-\infty$ w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę niewłaściwą $-\infty$, jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n \neq a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \right).$$

Piszemy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq X$, a - punkt skupienia D
 (X, d_X) , $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzenie metryczne

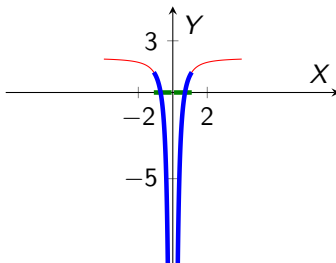
Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej $-\infty$ w punkcie)

Mówimy, że f ma w punkcie a granicę niewłaściwą $-\infty$, jeśli

$$\forall m < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (d_X(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) < m)$$

Piszemy wtedy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń metryczna

Definicja (Heinego granicy prawostronnej niewłaściwej ∞ w punkcie)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n > a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \right),$$

to mówimy, że f ma granicę prawostronną niewłaściwą ∞ w punkcie a i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej prawostronnej ∞ w punkcie)

Jeśli

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę prawostronną niewłaściwą ∞ i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń metryczna

Definicja (Heinego granicy lewostronnej ∞ w punkcie)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n < a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \right),$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę lewostronną niewłaściwą ∞
i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$.

Definicja (Cauchy'ego granicy lewostronnej niewłaściwej ∞ w punkcie)

Jeśli

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M)$$

to mówimy, że f ma w a granicę lewostronną niewłaściwą ∞ i
piszemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń metryczna

Definicja (Heinego granicy prawostronnej niewłaściwej $-\infty$ w punkcie)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n > a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \right),$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę prawostronną niewłaściwą $-\infty$ i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

Definicja (Cauchy'ego granicy prawostronnej niewłaściwej $-\infty$ w punkcie)

Jeśli

$$\forall m < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < m)$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę prawostronną niewłaściwą $-\infty$ i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a - punkt skupienia D
 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń metryczna

Definicja (Heinego granicy lewostronnej $-\infty$ w punkcie)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D, x_n < a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \right),$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę lewostronną niewłaściwą $-\infty$ i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Definicja (Cauchy'ego granicy lewostronnej niewłaściwej $-\infty$ w punkcie)

Jeśli

$$\forall m < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < m)$$

to mówimy, że f ma w punkcie a granicę lewostronną niewłaściwą $-\infty$ i piszemy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Wykład 5
Granica funkcji

Teleinformatyka,
AMiA, AEil,
2022/23

Granica funkcji w punkcie

Granica właściwa
funkcji w punkcie

Granice niewłaściwe
funkcji w punkcie

Granice w $\pm\infty$

Granice właściwe w
 $\pm\infty$

Granice niewłaściwe
w $\pm\infty$

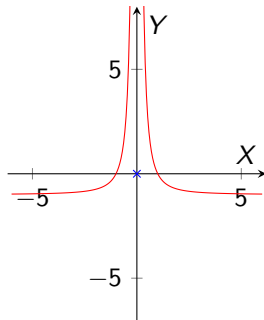
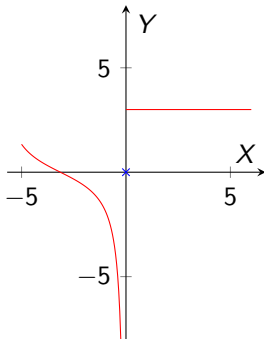
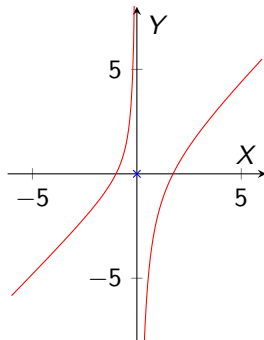
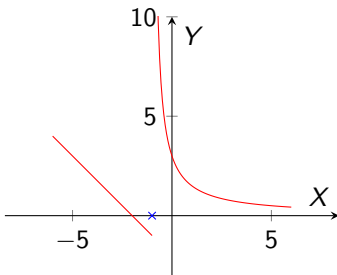
Asymptoty

Asymptoty pionowe

Asymptoty poziome

Asymptoty ukośne

Ćwiczenia i pytania



Ćwiczenie

Obliczyć.

$$① \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}}, \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8}{1 - 3^{\operatorname{ctg} x}}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8}{1 - 3^{\operatorname{ctg} x}}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{(x+2)^2}, \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{(x+2)^2}$$

$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D - nieograniczona z góry

Definicja (Heinego granicy w ∞)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L \right),$$

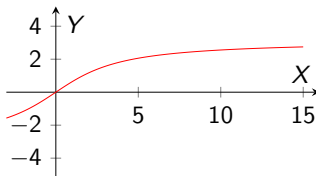
to mówimy, że f ma w ∞ granicę równą L i piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Definicja (Cauchy'ego granicy w ∞)

Jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (x > \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L) < \epsilon)$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę równą L i piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.



$f : D \rightarrow Y$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D - nieograniczona z dołu

Definicja (Heinego granicy w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L \right),$$

to mówimy, że f ma w $-\infty$ granicę równą L i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

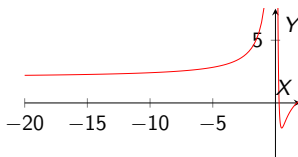
Definicja (Cauchyego granicy w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta < 0 \forall x \in D (x < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), L) < \epsilon)$$

to mówimy, że f ma w $-\infty$ granicę równą L i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D - nieograniczona z góry

Definicja (Heinego granicy niewłaściwej w ∞)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \right),$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę niewłaściwą równą ∞ i piszemy

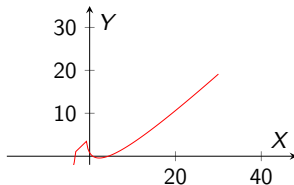
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej w ∞)

Jeśli

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (x > \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę równą ∞ i piszemy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D - nieograniczona z góry

Definicja (Heinego granicy niewłaściwej w ∞)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \right),$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę niewłaściwą równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

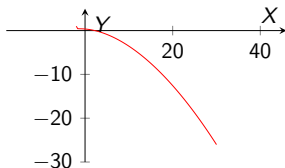
Definicja (Cauchyego granicy niewłaściwej w ∞)

Jeśli

$$\forall m < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (x > \delta \Rightarrow f(x) < m)$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę niewłaściwą równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, D - nieograniczona z dołu

Definicja (Heinego granicy niewłaściwej w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \right),$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę niewłaściwą równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

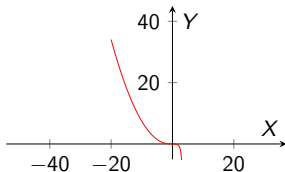
Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall M > 0 \exists \delta < 0 \forall x \in D (x < \delta \Rightarrow f(x) > M),$$

to mówimy, że f ma w ∞ granicę niewłaściwą równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$



$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, D$ - nieograniczona z dołu

Definicja (Heinego granicy niewłaściwej w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall (x_n), x_n \in D \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty \right),$$

to mówimy, że f ma w $-\infty$ granicę niewłaściwą równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

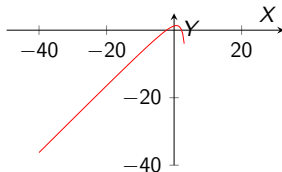
Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej w $-\infty$)

Jeśli

$$\forall m < 0 \exists \delta < 0 \forall x \in D (x < \delta \Rightarrow f(x) < m),$$

to mówimy, że f ma w $-\infty$ granicę równą $-\infty$ i piszemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$



Granica funkcji w punkcie

Granica właściwa funkcji w punkcie

Granice niewłaściwe funkcji w punkcie

Granice w $\pm\infty$

Granice właściwe w $\pm\infty$

Granice niewłaściwe w $\pm\infty$

Asymptoty

Asymptoty pionowe

Asymptoty poziome

Asymptoty ukośne

Ćwiczenia i pytania

Ważne granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ćwiczenie

Obliczyć.

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 - x})$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x}$$

Definicja

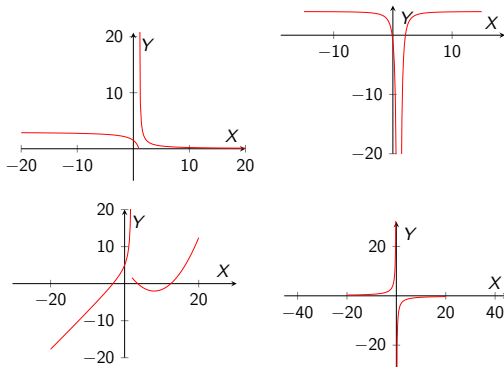
Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę pionową prawostronną* o równaniu $x = a$, jeśli $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę pionową lewostronną* o równaniu $x = a$, jeśli $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę pionową* o równaniu $x = a$, jeśli prosta ta jest jej asymptotą pionową prawo- i lewostronną.

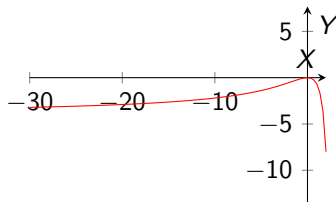
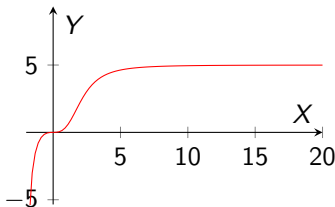


Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *ma asymptotę poziomą o równaniu $y = b$ w ∞* , jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę poziomą o równaniu $y = b$ w $-\infty$* , jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

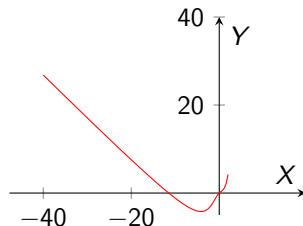
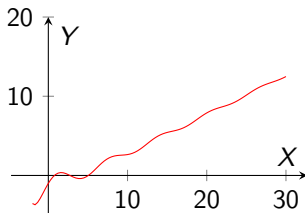


Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę ukośną o równaniu $y = ax + b$ w ∞* , jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Definicja

Krzywa $y = f(x)$ ma *asymptotę ukośną o równaniu $y = ax + b$ w $-\infty$* , jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



Twierdzenie

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną krzywej $y = f(x)$ w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Twierdzenie

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną krzywej $y = f(x)$ w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

Ćwiczenie

Wyznaczyć asymptoty krzywej $y = f(x)$.

$$① \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$② \quad f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 1}$$

$$③ \quad f(x) = x \cdot \ln(x^2 - 1)$$

Pytania

Podać przykład funkcji, która

- 1 ma nieskończenie wiele asymptot pionowych,
- 2 przecina swoją asymptotę,
- 3 ma asymptotę pionową pomimo, że $D_f = \mathbb{R}$.